

УДК 519.652.3

О ПОСТРОЕНИИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ¹⁾

© 2008 г. Б. И. Квасов

(630090 Новосибирск, просп. акад. Лаврентьева, 6, ИВТ СО РАН)

E-mail: kvasov@ict.nsc.ru

Поступила в редакцию 09.03.2007 г. Переработанный вариант 12.10.2007 г.

Задача построения интерполяционного гиперболического сплайна может быть сформулирована как дифференциальная многоточечная краевая задача. Ее дискретизация приводит к необходимости решения линейной системы с пятидиагональной матрицей, которая для неравноотстоящих данных может быть плохо обусловлена. Показано, что данную систему можно расщепить на трехдиагональные системы с диагональным преобладанием, решение которых не требует вычисления гиперболических функций и допускает эффективное распараллеливание. Библ. 19. Фиг. 3.

Ключевые слова: Изогеометрическая интерполяция, дифференциальная многоточечная краевая задача, метод сеток, дискретный гиперболический сплайн, распараллеливание прогонки.

ВВЕДЕНИЕ

Задача построения по дискретным данным сложных кривых и поверхностей с сохранением их формы называется *задачей изогеометрической интерполяции* (см. [1]). Введенные в [2] гиперболические сплайны с натяжением остаются до сих пор весьма популярным аппаратом решения этой задачи (см. [3]–[8]). Такие сплайны обладают достаточными для многих приложений свойствами гладкости и в сочетании с алгоритмами автоматического выбора параметров натяжения (см., например, [1], [9], [10]) хорошо адаптируют поведение сплайна по отношению к данным. К сожалению, задача вычисления значений гиперболических сплайнов из-за ошибок округления (при малых значениях параметров натяжения) и проблем переполнения (при больших значениях параметров натяжения) является очень трудной.

В [1], [11]–[15] рассматривался метод построения интерполяционных сплайнов, основанный на определении таких сплайнов как решений дифференциальных многоточечных краевых задач (ДМКЗ) с последующей дискретизацией. В [11]–[13] исходное дифференциальное уравнение четвертого порядка заменялось системой двух уравнений второго порядка, а в [1], [14], [15] ДМКЗ дискретизировалась непосредственно. По сравнению со стандартным подходом в [8] наш метод не требует вычисления значений гиперболических функций, но приводит к необходимости решения пятидиагональной линейной системы, которая для неравноотстоящих данных может быть плохо обусловлена (см. [16]). В данной работе показано, что эта система может быть расщеплена на трехдиагональные линейные системы с диагональным преобладанием, решение которых также не требует вычисления значений гиперболических функций и допускает эффективное распараллеливание. Рассмотрены случаи центральной и односторонней аппроксимаций первой производной в условиях гладкости для ДМКЗ. Приведены числовые примеры.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть имеются данные

$$(x_i, f_i), \quad i = 0, 1, \dots, N + 1, \quad (1)$$

где $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N+1} = b$. Положим

$$f[x_i, x_{i+1}] = (f_{i+1} - f_i)/h_i, \quad h_i = x_{i+1} - x_i, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 06-01-00030).

Данные (1) будем называть монотонно возрастающими, если

$$f[x_i, x_{i+1}] \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, N,$$

и выпуклыми, если

$$f[x_i, x_{i+1}] \geq f[x_{i-1}, x_i], \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Задача изогеометрической интерполяции состоит в построении достаточно гладкой функции S такой, что $S(x_i) = f_i, i = 0, 1, \dots, N + 1$, и S монотонна/выпукла на участках монотонности/выпуклости исходных данных.

Очевидно, что решение задачи изогеометрической интерполяции неединственно. Будем искать его в виде гиперболического сплайна с натяжением.

Определение 1. Интерполяционным гиперболическим сплайном S со множеством параметров натяжения $\{p_i \geq 0 | i = 0, 1, \dots, N\}$ назовем решение (ДМКЗ)

$$\frac{d^4 S}{dx^4} - \left(\frac{p_i}{h_i}\right)^2 \frac{d^2 S}{dx^2} = 0 \quad \forall x \in (x_i, x_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (2)$$

$$S \in C^2[a, b], \quad (3)$$

с условиями интерполяции

$$S(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, \dots, N + 1, \quad (4)$$

и краевыми условиями

$$S''(a) = f_0'' \quad \text{и} \quad S''(b) = f_{N+1}''. \quad (5)$$

Краевые условия (5) используются здесь для простоты изложения. Могут быть рассмотрены краевые условия и других типов (см. [1]).

Если в (2) положить $p_i = 0$ для всех i , то решением задачи (2)–(5) является кубический сплайн класса C^2 , который дает гладкую кривую, но не всегда сохраняет свойства монотонности/выпуклости исходных данных. При $p_i \rightarrow \infty$ в пределе получаем ломаную, которая сохраняет свойства формы исходных данных, но не является гладкой. В стандартных алгоритмах (см. [1], [9], [10]) автоматического выбора параметров формы p_i последние выбираются таким образом, чтобы результирующая кривая была возможно ближе к кубическому сплайну и одновременно наследовала бы свойства монотонности/выпуклости исходных данных.

2. КОНЕЧНО-РАЗНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Рассмотрим теперь дискретизацию сформулированной ДМКЗ. Для этого на каждом подотрезке $[x_i, x_{i+1}]$ введем дополнительную равномерную сетку с шагом $\tau_i = h_i/n_i, n_i \in \mathbb{N}$ и узлами $x_{ij} = x_i + j\tau_i, j = -1, 0, \dots, n_i + 1, i = 0, 1, \dots, N$. Будем искать сеточную функцию

$$\{u_{ij}, j = -1, 0, \dots, n_i + 1, i = 0, 1, \dots, N\},$$

удовлетворяющую разностным уравнениям

$$\left[\Lambda_i^2 - \left(\frac{p_i}{h_i}\right)^2 \Lambda_i \right] u_{ij} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n_i - 1, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (6)$$

где

$$\Lambda_i u_{ij} = \frac{u_{i,j-1} - 2u_{ij} + u_{i,j+1}}{\tau_i^2}.$$

Аппроксимация условий гладкости (3) дает соотношения

$$\begin{aligned} u_{i-1, n_{i-1}} &= u_{i0}, \\ \frac{u_{i-1, n_{i-1}+1} - u_{i-1, n_{i-1}-1}}{2\tau_{i-1}} &= \frac{u_{i,1} - u_{i,-1}}{2\tau_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ \Lambda_{i-1} u_{i-1, n_{i-1}} &= \Lambda_i u_{i,0}. \end{aligned} \quad (7)$$

Условия (4) и (5) преобразуются к виду

$$u_{i,0} = f_i, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad u_{N, n_N} = f_{N+1} \quad (8)$$

и

$$\Lambda_0 u_{0,0} = f_0'', \quad \Lambda_N u_{N, n_N} = f_{N+1}'' \quad (9)$$

Соотношения (7) и краевые условия (9) позволяют исключить “лишние” неизвестные $u_{i,-1}$, u_{i, n_i+1} , $i = 0, 1, \dots, N$. Дискретное сеточное решение теперь будет определено в виде

$$\{u_{ij}, j = 0, 1, \dots, n_i, i = 0, 1, \dots, N\}. \quad (10)$$

Существование и единственность решения линейной системы (6)–(9) будут доказаны ниже. Обсуждение практических аспектов прямого решения этой пятидиагональной системы проведено в [1]. Нахождение ее решения (10) не требует вычисления значений гиперболических функций. Оценки числа обусловленности системы (6)–(9) получены в [1], [16].

3. РАСЩЕПЛЕНИЕ СИСТЕМЫ И ПРОДОЛЖЕНИЕ СЕТОЧНОГО РЕШЕНИЯ

Для изучения решения системы (6)–(9) введем обозначение

$$m_{ij} = \Lambda_i u_{ij}, \quad j = 0, 1, \dots, n_i, \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (11)$$

Тогда на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ разностные уравнения (6) принимают вид

$$\begin{aligned} m_{i0} &= m_i, \\ \frac{m_{i, j-1} - 2m_{ij} + m_{i, j+1}}{\tau_i^2} - \left(\frac{p_i}{h_i}\right)^2 m_{ij} &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, n_i - 1, \\ m_{i, n_i} &= m_{i+1}, \end{aligned} \quad (12)$$

m_i и m_{i+1} – заданные числа. Система (12) имеет единственное решение, которое может быть записано следующим образом:

$$m_{ij} = M_i(x_{ij}), \quad j = 0, 1, \dots, n_i,$$

где

$$M_i(x) = m_i \frac{\text{sh}[k_i(1-t)]}{\text{sh}k_i} + m_{i+1} \frac{\text{sh}(k_i t)}{\text{sh}k_i}, \quad t = \frac{x - x_i}{h_i}. \quad (13)$$

Параметры k_i являются решениями трансцендентных уравнений

$$2n_i \text{sh} \frac{k_i}{2n_i} = p_i, \quad p_i \geq 0,$$

т.е.

$$k_i = 2n_i \ln \left(\frac{p_i}{2n_i} + \sqrt{\left(\frac{p_i}{2n_i}\right)^2 + 1} \right) \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

В силу соотношений (11) и с учетом условий интерполяции (8) имеем

$$\begin{aligned} u_{i0} &= f_i, \\ \frac{u_{i,j-1} - 2u_{ij} + u_{i,j+1}}{\tau_i^2} &= m_{ij}, \quad j = 0, 1, \dots, n_i, \\ u_{i,n_i} &= f_{i+1}. \end{aligned} \quad (14)$$

$m_{ij}, j = 0, 1, \dots, n_i$, система (14) имеет единственное решение, которое может быть представлено в виде

$$u_{ij} = U_i(x_{ij}), \quad j = -1, 0, \dots, n_i + 1,$$

где

$$U_i(x) = f_i(1-t) + f_{i+1}t + \varphi_i(1-t)h_i^2 m_i + \varphi_i(t)h_i^2 m_{i+1} \quad (15)$$

и

$$\varphi_i(t) = \frac{\operatorname{sh}(k_i t) - t \operatorname{sh} k_i}{p_i^2 \operatorname{sh} k_i}.$$

Отметим, что формулы (13) и (15) связаны соотношением

$$M_i(x) = \Lambda_i U_i(x) = \Lambda_i \varphi_i(1-t)h_i^2 m_i + \Lambda_i \varphi_i(t)h_i^2 m_{i+1}. \quad (16)$$

Чтобы решить системы (12) и (14), требуется лишь определить значения $m_i, i = 0, 1, \dots, N+1$, так, чтобы выполнялись условия стыковки (7) и краевые условия (9). Согласно уравнениям (14) и (15), условия (7) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} U_{i-1}(x_i) &= U_i(x_i), \\ \frac{U_{i-1}(x_i + \tau_{i-1}) - U_{i-1}(x_i - \tau_{i-1})}{2\tau_{i-1}} &= \frac{U_i(x_i + \tau_i) - U_i(x_i - \tau_i)}{2\tau_i}, \\ \Lambda_{i-1} U_{i-1}(x_i) &= \Lambda_i U_i(x_i), \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\Lambda_j U_j(x) = \frac{U_j(x + \tau_j) - 2U_j(x) + U_j(x - \tau_j)}{\tau_j^2}, \quad x \in [x_j, x_{j+1}].$$

Согласно уравнениям (11), (12) и (15), первое и третье равенства в (17) тождественно выполняются. В силу формулы (15) и краевых условий (9), второе равенство в соотношениях (17) дает нам следующую линейную систему с трехдиагональной матрицей для неизвестных значений m_i :

$$\begin{aligned} m_0 &= f_0'', \\ \alpha_{i-1} h_{i-1} m_{i-1} + (\beta_{i-1} h_{i-1} + \beta_i h_i) m_i + \alpha_i h_i m_{i+1} &= d_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ m_{N+1} &= f_{N+1}'' \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} d_i &= \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}, \\ \alpha_i &= \frac{\varphi_i(1/n_i) - \varphi_i(-1/n_i)}{\frac{2}{n_i}} = -\frac{n_i \operatorname{sh} \frac{k_i}{n_i} - \operatorname{sh} k_i}{p_i^2 \operatorname{sh}(k_i)}, \end{aligned}$$

$$\beta_i = \frac{\varphi_i(1 + 1/n_i) - \varphi_i(1 - 1/n_i)}{\frac{2}{n_i}} = \frac{n_i \operatorname{ch} k_i \operatorname{sh} \frac{k_i}{n_i} - \operatorname{sh} k_i}{p_i^2 \operatorname{sh}(k_i)}.$$

Используя разложение гиперболических функций в приведенных выше выражениях в степенные ряды, получаем

$$\beta_i \geq 2\alpha_i > 0, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad \forall n_i > 1, \quad p_i \geq 0.$$

Следовательно, система (18) имеет диагональное преобладание и в силу этого обладает единственным решением. Теперь можно заключить, что система (6)–(9) имеет единственное решение, которое может быть представлено в виде $U_i(x_{ij}), j = -1, 0, \dots, n_i + 1, i = 0, 1, \dots, N$, тогда как постоянные m_i находятся из системы (18).

Положим

$$U(x) := U_i(x), \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (19)$$

В силу приведенного построения будем называть U *дискретным гиперболическим сплайном с натяжением*, интерполирующим данные (1).

4. ИСКЛЮЧЕНИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Коэффициенты системы (18) содержат значения гиперболических функций $\operatorname{sh}(\cdot)$ и $\operatorname{ch}(\cdot)$. Чтобы исключить их вычисление, воспользуемся вариантом алгоритма распараллеливания прогонки (см. [17]).

Из уравнений (14) при $j = 0$ и $j = n_i$ имеем

$$\begin{aligned} u_{i,-1} &= 2f_i - u_{i,1} + \tau_i^2 m_i, \\ u_{i,n_i+1} &= 2f_{i+1} - u_{i,n_i-1} + \tau_i^2 m_{i+1}, \end{aligned}$$

Поэтому второе из условий (17) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,1} - u_{i,-1}}{2\tau_i} &= \frac{u_{i,1} - f_i}{\tau_i} - \frac{\tau_i}{2} m_i, \\ \frac{u_{i,n_i+1} - u_{i,n_i-1}}{2\tau_i} &= \frac{f_{i+1} - u_{i,n_i-1}}{\tau_i} + \frac{\tau_i}{2} m_{i+1}. \end{aligned}$$

или

$$\frac{\tau_{i-1} + \tau_i}{2} m_i = \frac{u_{i,1} - f_i}{\tau_i} - \frac{f_i - u_{i-1,n_{i-1}-1}}{\tau_{i-1}}, \quad (20)$$

или, по соглашению (19), в виде

$$m_i = 2U[x_i - \tau_{i-1}, x_i, x_i + \tau_i].$$

Для исключения в (20) неизвестных величин $u_{i,1}$ и $u_{i-1,n_{i-1}-1}$ воспользуемся следующим приемом.

Пусть α_{ij} и $\beta_{ij}, j = 0, 1, \dots, n_i$ – решения системы (12) с краевыми условиями $m_{i0} = 1, m_{i,n_i} = 0$ и $m_{i0} = 0, m_{i,n_i} = 1$ соответственно. Тогда очевидно, что решение системы (12) можно выписать в виде

$$m_{ij} = m_i \alpha_{ij} + m_{i+1} \beta_{ij}, \quad j = 0, 1, \dots, n_i. \quad (21)$$

Пусть теперь γ_{ij} и δ_{ij} – решения системы (14) с нулевыми краевыми условиями $u_{i0} = u_{i, n_i} = 0$ и правыми частями α_{ij} и β_{ij} соответственно, а ε_{ij} – решение однородной системы (14) с краевыми условиями $\varepsilon_{i0} = f_i$ и $\varepsilon_{i, n_i} = f_{i+1}$. Так как

$$\varepsilon_{ij} = f_i(1 - t_{ij}) + f_{i+1}t_{ij}, \quad j = 0, 1, \dots, n_i,$$

где $t_{ij} = (x_{ij} - x_i)/h_i$, то для решения системы (14) получаем

$$u_{ij} = f_i(1 - t_{ij}) + f_{i+1}t_{ij} + m_i\gamma_{ij} + m_{i+1}\delta_{ij}, \quad j = 0, 1, \dots, n_i. \quad (22)$$

Пользуясь этой формулой и подставляя $u_{i,1}$ и $u_{i-1, n_{i-1}-1}$ в (20), находим с учетом краевых условий (9) систему

$$\begin{aligned} m_0 &= f_0'', \\ -\frac{\gamma_{i-1, n_{i-1}-1}}{\tau_{i-1}}m_{i-1} + \left(\frac{\tau_{i-1} + \tau_i}{2} - \frac{\delta_{i-1, n_{i-1}-1}}{\tau_{i-1}} - \frac{\gamma_{i,1}}{\tau_i}\right)m_i - \frac{\delta_{i1}}{\tau_i}m_{i+1} &= \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ m_{N+1} &= f_{N+1}''. \end{aligned} \quad (23)$$

Покажем, что эта система отличается от (18) лишь формой записи.

Явный вид величин α_{ij} , β_{ij} , γ_{ij} и δ_{ij} легко может быть получен из формул (13) и (15). Так как, согласно формуле (15),

$$u_{ij} = f_i(1 - t_{ij}) + f_{i+1}t_{ij} + \varphi_i(1 - t_{ij})h_i^2 m_i + \varphi_i(t_{ij})h_i^2 m_{i+1},$$

то для коэффициентов системы (23) находим

$$\begin{aligned} -\frac{\delta_{i1}}{\tau_i} &= -\frac{1}{\tau_i}\varphi_i(t_{i1})h_i^2 = -n_i h_i \varphi_i\left(\frac{1}{n_i}\right), \\ \frac{\tau_i}{2} - \frac{\gamma_{i1}}{\tau_i} &= \frac{\tau_i}{2} - \frac{1}{\tau_i}\varphi_i(1 - t_{i1})h_i^2 = h_i \left[\frac{1}{2n_i} - n_i \varphi_i\left(1 - \frac{1}{n_i}\right) \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Функция φ , удовлетворяет условиям

$$\varphi_i(0) = \varphi_i(1) = \Lambda_i \varphi_i(0) = 0, \quad \Lambda_i \varphi_i(1) = h_i^{-2},$$

откуда, в частности, следуют равенства

$$\begin{aligned} \varphi_i\left(-\frac{1}{n_i}\right) + \varphi_i\left(\frac{1}{n_i}\right) &= 0, \\ \varphi_i\left(1 - \frac{1}{n_i}\right) + \varphi_i\left(1 + \frac{1}{n_i}\right) &= \frac{1}{n_i^2}. \end{aligned}$$

С учетом этих соотношений, из равенств (24) имеем

$$\begin{aligned} -\frac{\delta_{i1}}{\tau_i} &= -h_i \frac{\varphi_i(1/n_i) - \varphi_i(-1/n_i)}{2/n_i} = \alpha_i h_i, \\ \frac{\tau_i}{2} - \frac{\gamma_{i1}}{\tau_i} &= h_i \frac{\varphi_i(1 + 1/n_i) - \varphi_i(1 - 1/n_i)}{2/n_i} = \beta_i h_i. \end{aligned}$$

Аналогично получаем, что

$$-\frac{\gamma_{i-1, n_{i-1}-1}}{\tau_{i-1}} = \alpha_{i-1} h_{i-1}, \quad \frac{\tau_{i-1}}{2} - \frac{\delta_{i-1, n_{i-1}-1}}{\tau_{i-1}} = \beta_{i-1} h_{i-1}.$$

Таким образом, система (23) отличается от системы (18) лишь формой записи. Как следствие, эта система имеет диагональное преобладание. В отличие от системы (18), система (23) не тре-

бует вычисления значений гиперболических функций и может быть эффективно решена методом обычной трехточечной прогонки.

5. АЛГОРИТМ

В отличие от стандартного подхода из [1], основанного на прямом решении пятидиагональной линейной системы (6)–(9), рассмотренный в предыдущих двух пунктах метод использует расщепление этой системы на трехдиагональные линейные системы, решение которых также не требует вычисления значений гиперболических функций и обеспечивает дешевое и простое получение сеточного решения (10).

Сформулируем основные шаги рассмотренного в разд. 3, 4 алгоритма.

Шаг 1. Решить $2(N + 1)$ трехдиагональных систем (12) с краевыми условиями $m_{i,0} = 1$, $m_{i,n_i} = 0$ и $m_{i,0} = 0$, $m_{i,n_i} = 1$ для нахождения, соответственно, величин α_{ij} и β_{ij} , $j = 0, 1, \dots, n_i$, $i = 0, 1, \dots, N$.

Шаг 2. Решить $2(N + 1)$ трехдиагональных систем (14) с однородными краевыми условиями $u_{i,0} = u_{i,n_i} = 0$ и правыми частями α_{ij} и β_{ij} для нахождения, соответственно, величин γ_{ij} и δ_{ij} , $j = 0, 1, \dots, n_i$, $i = 0, 1, \dots, N$.

Шаг 3. При помощи системы (23) вычислить параметры m_i , $i = 0, 1, \dots, N + 1$.

Шаг 4. По формуле (22) найти значения u_{ij} , $j = 0, 1, \dots, n_i$, $i = 0, 1, \dots, N$.

В этом алгоритме решение любой из систем (12) и (14) требует выполнения $8q$ арифметических операций (см. [18]), где q – число неизвестных. Это существенно дешевле, чем прямые вычисления по формуле (15).

Шаги 1 и 2 в этом алгоритме можно объединить. Вместо $2(N + 1)$ трехдиагональных систем (12) и (14) рассмотрим $N + 1$ пятидиагональную систему

$$\begin{aligned} u_{i,0} &= f_i, & \Lambda_i u_{i,0} &= m_i, \\ \Lambda_i^2 u_{i,j} - \left(\frac{p_i}{h_i}\right)^2 \Lambda_i u_{i,j} &= 0, & j &= 1, 2, \dots, n_i - 1, & i &= 0, 1, \dots, N. \\ u_{i,n_i} &= f_{i+1}, & \Lambda_i u_{i,n_i} &= m_{i+1}, \end{aligned} \quad (25)$$

Вначале находятся решения этих систем γ_{ij} и δ_{ij} с краевыми условиями $u_{i,0} = u_{i,n_i} = 0$ и, соответственно, $\Lambda_i u_{i,0} = 1$, $\Lambda_i u_{i,n_i} = 0$ и $\Lambda_i u_{i,0} = 0$, $\Lambda_i u_{i,n_i} = 1$, т.е. решаются $2(N + 1)$ пятидиагональных систем вида (25). Далее для нахождения сеточного решения u_{ij} , $j = 0, 1, \dots, n_i$, $i = 0, 1, \dots, N$, выполняются шаги 3 и 4 основного алгоритма.

Данные алгоритмы могут быть эффективно распараллелены и реализованы на многопроцессорных ЭВМ.

6. ОДНОСТОРОННЯЯ АППРОКСИМАЦИЯ ПЕРВОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Вместо второго из условий стыковки (17) рассмотрим равенство односторонних аппроксимаций первой производной дискретного гиперболического сплайна

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\tau_{i-1}} [U_{i-1}(x_i - 2\tau_{i-1}) - 4U_{i-1}(x_i - \tau_{i-1}) + 3U_{i-1}(x_i)] &= \\ = \frac{1}{2\tau_i} [-3U_i(x_i) + 4U_i(x_i + \tau_i) - U_i(x_i + 2\tau_i)]. \end{aligned} \quad (26)$$

Отсюда, пользуясь формулой (15), с учетом краевых условий (9) получаем систему

$$\begin{aligned} m_0 &= f_0'', \\ \alpha_{i-1} h_{i-1} m_{i-1} &= (\beta_{i-1} h_{i-1} + \beta_i h_i) m_i + \alpha_i h_i m_{i+1} = d_i, & i &= 1, 2, \dots, N, \\ m_{N+1} &= f_{N+1}'', \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$d_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}},$$

$$\alpha_i = \frac{\varphi_i(2/n_i) - 4\varphi_i(1/n_i)}{\frac{2}{n_i}} = \frac{n_i \operatorname{sh}(2k_i/n_i) - 4 \operatorname{sh}(k_i/n_i) + \frac{2}{n_i} \operatorname{sh} k_i}{p_i^2 \operatorname{sh} k_i},$$

$$\beta_i = \frac{\varphi_i(1 - 2/n_i) - 4\varphi_i(1 - 1/n_i)}{2/n_i} = \frac{n_i \operatorname{sh} k_i(1 - 2/n_i) - 4 \operatorname{sh} k_i(1 - 1/n_i) + (3 - 2/n_i) \operatorname{sh} k_i}{p_i^2 \operatorname{sh} k_i}.$$

Разлагая гиперболические функции в выражениях для α_i и β_i в степенные ряды, находим

$$\beta_i > \alpha_i > 0, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad \forall n_i > 1, \quad p_i \geq 0.$$

Следовательно, система (27) имеет диагональное преобладание и в силу этого обладает единственным решением. Тем самым доказаны существование и единственность дискретного гиперболического сплайна с условием стыковки (26).

Получим теперь аналог системы (23). Равенство (26) можно переписать в виде

$$\frac{u_{i-1, n_{i-1}-2} - 4u_{i-1, n_{i-1}-1} + 3u_{i-1, n_{i-1}}}{2\tau_{i-1}} = \frac{-3u_{i,0} + 4u_{i,1} - u_{i,2}}{2\tau_i},$$

или, произведя группировку,

$$\frac{\tau_{i-1}}{2} m_{i-1, n_{i-1}-1} + \frac{\tau_i}{2} m_{i,1} = \frac{u_{i,1} - f_i}{\tau_i} - \frac{f_i - u_{i-1, n_{i-1}-1}}{\tau_{i-1}}.$$

Отсюда согласно формулам (21) и (22) с учетом краевых условий (9) получаем

$$m_0 = f_0'',$$

$$\left(\frac{\tau_{i-1}}{2} \alpha_{i-1, n_{i-1}-1} - \frac{\gamma_{i-1, n_{i-1}-1}}{\tau_{i-1}} \right) m_{i-1} + \left(\frac{\tau_{i-1}}{2} \beta_{i-1, n_{i-1}-1} - \frac{\delta_{i-1, n_{i-1}-1}}{\tau_{i-1}} + \frac{\tau_i}{2} \alpha_{i,1} - \frac{\gamma_{i,1}}{\tau_i} \right) m_i +$$

$$+ \left(\frac{\tau_i}{2} \beta_{i,1} - \frac{\delta_{i,1}}{\tau_i} \right) m_{i+1} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}},$$

$$i = 1, 2, \dots, N,$$

$$m_{N+1} = f_{N+1}''.$$
(28)

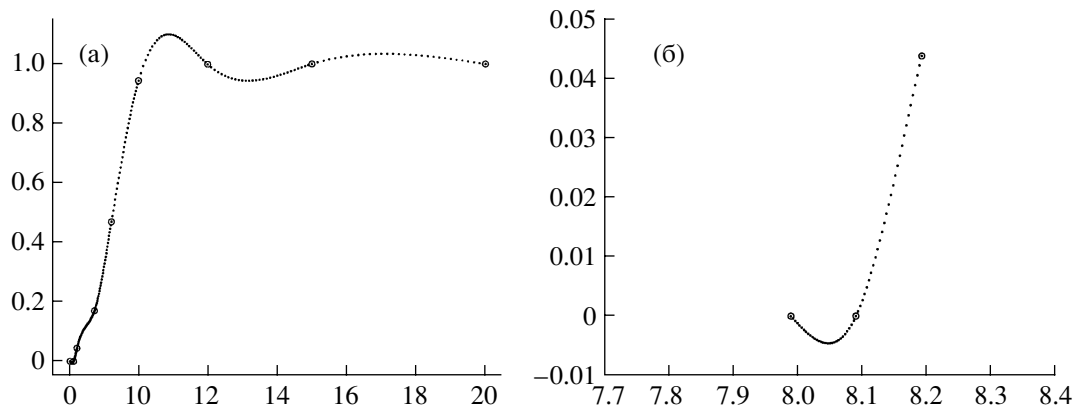
Пользуясь формулами (15) и (16), непосредственно убеждаемся, что

$$\frac{\tau_{i-1}}{2} \alpha_{i-1, n_{i-1}-1} - \frac{\gamma_{i-1, n_{i-1}-1}}{\tau_{i-1}} = \alpha_{i-1} h_{i-1},$$

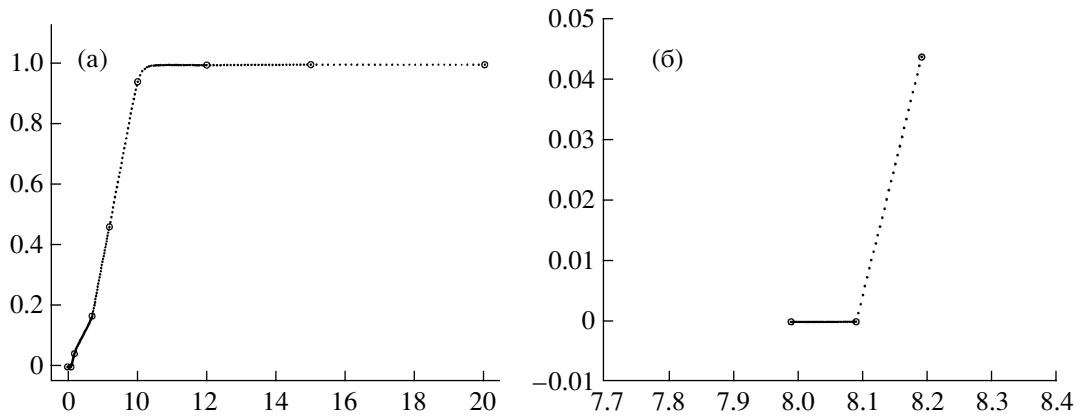
$$\frac{\tau_{i-1}}{2} \beta_{i-1, n_{i-1}-1} - \frac{\delta_{i-1, n_{i-1}-1}}{\tau_{i-1}} = \beta_{i-1} h_{i-1},$$

$$\frac{\tau_i}{2} \alpha_{i,1} - \frac{\gamma_{i,1}}{\tau_i} = \beta_i h_i, \quad \frac{\tau_i}{2} \beta_{i,1} - \frac{\delta_{i,1}}{\tau_i} = \alpha_i h_i,$$

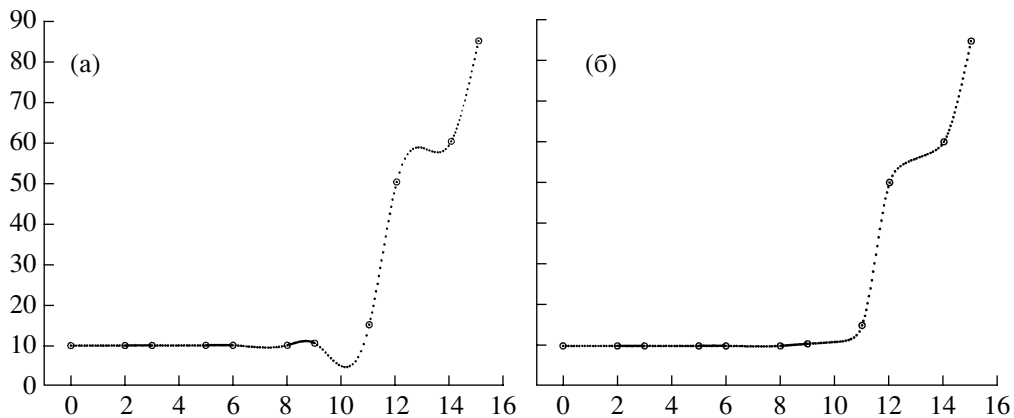
т.е. система (28) отличается от (27) лишь формой записи. Таким образом, система (28) имеет диагональное преобладание и ее решение может быть найдено методом обычной трехточечной прогонки. Это позволяет опять избежать вычисления значений гиперболических функций. Реализация описанного в разд. 5 алгоритма здесь будет отличаться только на шаге 3, где вместо системы (23) будет решаться система (28).



Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

7. ЧИСЛОВЫЕ ПРИМЕРЫ

В этом разделе на ряде общеупотребительных примеров будут проиллюстрированы изогеометрические свойства дискретных гиперболических сплайнов с натяжением. Заметим прежде, что наш дискретный гиперболический сплайн U_i , задаваемый формулой (15), обладает свойствами сохранения формы данных, присущими стандартному гиперболическому сплайну (см., например, [10]), а именно: функция U_i является выпуклой (вогнутой) на $[x_i, x_{i+1}]$ тогда и только тогда,

когда $m_{i+j} \leq 0$ (≥ 0), $j = 0, 1$, и U_i может иметь на $[x_i, x_{i+1}]$ не более одной точки перегиба. Следовательно, чтобы сохранить форму исходных данных, достаточно проанализировать величины $\Lambda_i u_{i,0}$ и $\Lambda_i u_{i,n_i}$ и увеличить при необходимости значения параметров натяжения. Зарекомендовавшие себя стратегии автоматического выбора параметров натяжения для стандартных гиперболических сплайнов (см., например, [1], [9], [10]) могут быть успешно использованы и в нашем дискретном контексте.

В первом примере интерполировались радиохимические данные, приведенные ниже. Эти данные являются неравноотстоящими. Между точками задания данных использовалась равномерная сетка с одним и тем же числом узлов, а именно (30). Краевые условия задавались в виде $m_0 = \Lambda_0 u_{0,0} = 0$, $m_{N+1} = \Lambda_N u_{N,n_N} = 0$. Эффект изменения значений параметров натяжения показан на фиг. 1 и 2. Графики фиг. 1 получены при нулевых значениях параметров натяжения ($p_i = 0$ для всех i), что соответствует интерполяционному дискретному кубическому сплайну (фиг. 1б – увеличение левого нижнего угла). График интерполяционного дискретного гиперболического сплайна с параметрами натяжения $p_0 = p_1 = 300$, $p_i = 15$, $i = 2, \dots, 7$, показан на фиг. 2. Очевиден эффект стягивания при увеличении значений параметров натяжения.

x_i	7.99	8.09	8.19	8.7	9.2	10	12	15	20
f_i	0	2.76429E-5	4.37498E-2	0.169183	0.469428	0.943740	0.998636	0.999916	0.999994

Во втором примере использовались данные из [19]:

x_i	0	2	3	5	6	8	9	11	12	14	15
f_i	10	10	10	10	10	10	10.5	15	56	60	85

Для этих неравноотстоящих данных строился интерполяционный дискретный гиперболический сплайн с 20 узлами равномерной сетки на каждом подотрезке между точками задания данных. Краевые условия брались опять в виде $m_0 = m_{N+1} = 0$. На фиг. 3 показан график интерполяционного дискретного кубического сплайна, полученный при $p_i = 0$ для всех i . Заметно нарушение присущих исходным данным свойств монотонности и выпуклости. На фиг. 3б показан интерполяционный дискретный гиперболический сплайн при $p_5 = p_6 = p_8 = 10$ и $p_i = 0$, который для остальных значений i адекватно воспроизводит форму исходных данных.

Автор выражает признательность рецензенту за полезные замечания, способствовавшие улучшению изложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Квасов Б.И. Методы изометрической аппроксимации сплайнами. М.: Физматлит, 2006.
2. Schweikert D.G. An interpolating curve using a spline in tension // J. Math. Phys. 1966. V. 45. P. 312–317.
3. Koch P.E., Lyche T. Interpolation with exponential B-splines in tension // Geometric Modelling, Computing/Supplementum 8. Wien: Springer, 1993. P. 173–190.
4. Maru@si@c M., Rogina M. Sharp error bounds for interpolating splines in tension // J. Comput. Appl. Math. 1995. V. 61. P. 205–223.
5. McCartin B.J. Theory of exponential splines // J. Approximation Theory. 1999. V. 66. P. 1–23.
6. Rogina M. A deBoor type algorithm for tension splines // Curves and Surface Fitting: Saint-Malo 2002. Brentwood: Nashboro Press, 2003. P. 343–352.
7. Sapidis N.S., Kaklis P.D. An algorithm for constructing convexity and monotonicity-preserving splines in tension // Comput. Aided Geometric Design. 1988. V. 5. P. 127–137.
8. Sp@ath H. One dimensional spline interpolation algorithms. Massachusetts: A K Peters, 1995.
9. Renka R.J. Interpolation tension splines with automatic selection of tension factors // SIAM J. Sci. Statist. Comput. 1987. V. 8. P. 393–415.
10. Rentrop P. An algorithm for the computation of exponential splines // Numer. Math. 1980. V. 35. P. 81–93.
11. Люлька В.А., Романенко А.В. Построение интерполяционных кривых методом сеток // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1994. Т. 34. № 6. С. 827–836.
12. Люлька В.А., Михайлов И.Е. О построении интерполяционных кривых // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 10. С. 1448–1450.
13. Паасонен В.И. Параллельный алгоритм построения гиперболических сплайнов // Вычисл. технологии. Новосибирск: ИВТ СО РАН, 2006. Т. 11. № 6. С. 87–95.

14. *Costantini P., Kvasov B.I., Manni C.* On discrete hyperbolic tension splines // *Advances Comput. Math.* 1999. V. 11. P. 331–354.
15. *Kvasov B.I.* Methods of shape-preserving spline approximation. Singapore: World Scient. Publ. Co. Pte. Ltd., 2000.
16. *Rogina M., Singer S.* Conditions of matrices in discrete tension spline approximations of DMBVP // *Ann. Univ. Ferrara.* 2007. V. 53. P. 393–404.
17. *Яненко Н.Н., Коновалов А.Н., Бугров А.Н., Шустов Г.В.* Об организации параллельных вычислений и “распараллеливании” прогонки // *Числ. методы механ. сплошной среды.* Новосибирск, 1978. Т. 9. № 7. С. 139–146.
18. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
19. *Akima H.* A new method of interpolation and smooth curve fitting based on local procedures // *J. Assoc. Comput. Machinery.* 1970. V. 17. P. 589–602.